Exame final nacional de Matemática A **(2017, Época especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como o número a formar deve ser maior que 20 000, então para o algarismo das dezenas de milhar existem apenas 3 escolhas possíveis (2, 3 e 4).
   Para os restantes 4 posições do número existem 4 algarismos disponíveis (0 e 1 e os dois algarismos que não figuram na posição das dezenas de milhar), e como os algarismos devem ser todos diferentes, para as restantes 4 posições existem $P_4 = {}^4A_4 = 4!$ escolhas diferentes.

   Assim, nas condições do enunciado existem $3 \times 4! = 72$ números.

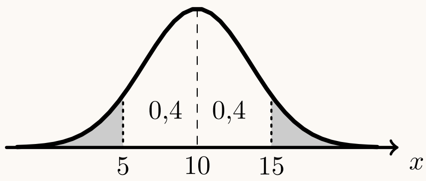
   Resposta: **Opção C**

2. Como a distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio (10), temos que:

   $$P(\mu < X < \mu + k) = P(\mu - k < X < \mu)$$

   e assim:

   - $P(5 < X < 10) = P(10 < X < 15) = 0{,}4$
   - $P(5 < X < 15) = P(5 < X < 10) + P(10 < X < 15) =$
     $= 0{,}4 + 0{,}4 = 0{,}8$
   - $P(X < 5 \vee X > 15) = 1 - P(5 < X < 15) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

   Resposta: **Opção B**

3. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

   $$4 + \log_a\left(5^{\ln a}\right) = 4 + \ln a \times (\log_a 5) = 4 + \frac{\log_a a}{\log_a e} \times (\log_a 5) = 4 + \frac{1 \times \log_a 5}{\log_a e} =$$

   $$= 4 + \frac{\log_a 5}{\log_a e} = 4 + \ln 5 = \ln\left(e^4\right) + \ln 5 = \ln(e^4 \times 5) = \ln(5e^4)$$

   Resposta: **Opção B**

4. Pela observação do gráfico e considerando os elementos do enunciado, podemos identificar os intervalos em que a função é decrescente e o intervalo em que é crescente e relacionar com o sinal da primeira derivada função.
Da mesma forma, podemos identificar os intervalos em que a função tem concavidades diferentes e relacionar com o sinal da segunda derivada.
Organizando as informações anteriores e estudando o sinal do produto $f'(x) \times f''(x)$, na mesma tabela, vem:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
f	$\nearrow$	Máx.		$\searrow$		Min.	$\nearrow$
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f		$\frown$		Pt. I.		$\smile$	
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f' \times f''$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

E assim, temos que o conjunto solução da condição $f'(x) \times f''(x) \geq 0$, é $[-2{,}0] \cup [2, +\infty[$

Resposta: **Opção A**

5. Usando a definição de função inversa e depois de função diferença, como $f(3) = 4$, vem que:

$$(f-g)^{-1}(2) = 3 \Leftrightarrow (f-g)(3) = 2 \Leftrightarrow f(3) - g(3) = 2 \Leftrightarrow 4 - g(3) = 2 \Leftrightarrow 4 - 2 = g(3) \Leftrightarrow 2 = g(3)$$

Resposta: **Opção B**

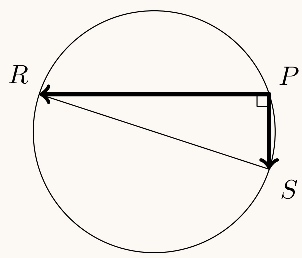
6. Como para qualquer ponto P da circunferência de diâmetro $[RS]$ o ângulo RPQ é reto, então para qualquer ponto P da circunferência, temos que:

$$\overrightarrow{PR} \,.\, \overrightarrow{PS} = 0$$

Temos ainda que:

- para qualquer ponto P no interior da circunferência o ângulo RPQ é obtuso, vem que $\overrightarrow{PR} \,.\, \overrightarrow{PS} > 0$
- para qualquer ponto P no exterior da circunferência o ângulo RPQ é agudo, vem que $\overrightarrow{PR} \,.\, \overrightarrow{PS} < 0$

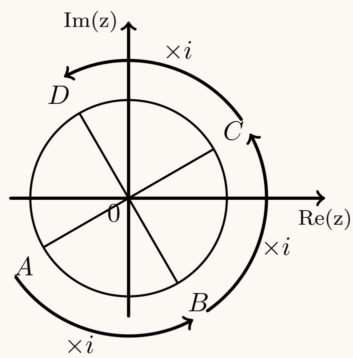
Desta forma, o conjunto A dos pontos P tais que $\overrightarrow{PR} \,.\, \overrightarrow{PS} = 0$, é a circunferência de diâmetro $[RS]$



Resposta: **Opção D**

7. Como a multiplicação de um número complexo por i corresponde a uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ rad da imagem geométrica desse número complexo, temos que:

- B é a imagem geométrica de iz
- C é a imagem geométrica de $i \times i \times z = i^2 z$
- D é a imagem geométrica de $i \times i \times i \times z = i^3 z$



Resposta: **Opção D**

8. Como todos os termos da sucessão são positivos, $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, e assim, vem que:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$$

Ou seja, a sucessão (u_n) é monótona decrescente, pelo que é limitada superiormente pelo primeiro termo e como todos os termos são positivos, então é limitada inferiormente por zero, isto é:

$$0 < u_n \leq u_1$$

Isto é, a sucessão (u_n) é limitada.

Resposta: **Opção A**

GRUPO II

---

1. Escrevendo $1-i$ na f.t. temos $i - i = \rho \operatorname{cis} \alpha$, onde:
   - $\rho = |i - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
   - $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{-1}{1} = -1$; como $\operatorname{sen} \alpha < 0$ e $\cos \alpha > 0$, α é um ângulo do 4º quadrante, logo $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$

   Logo $1 - i = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$, e por isso:

$$z_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\theta} = \frac{\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\theta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$

   Desta forma, temos que:
   - Como $|\overline{w}| = |w|$ e $\operatorname{Arg}(\overline{w}) = -\operatorname{Arg}(w)$, então: $\overline{z_1} = \operatorname{cis}\left(-\left(-\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)\right) = \operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta\right)$
   - $z_1^4 = 1^4 \operatorname{cis}\left(4 \times \left(-\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)\right) = 1 \operatorname{cis}(-\pi - 4\theta) = \operatorname{cis}(-\pi - 4\theta)$

   E assim, vem que:

$$w = \overline{z_1} \times z_1^4 = \left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\right) \times (\operatorname{cis}(-\pi - 4\theta)) = (1 \times 1)\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \theta + (-\pi - 4\theta)\right) =$$

$$= 1 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \theta - \pi - 4\theta\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4} - 3\theta\right)$$

   Pelo que, como $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{4}\right[$, então:

$$\frac{\pi}{12} < \theta < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{12} > -3\theta > -\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{12} > -\frac{3\pi}{4} - 3\theta > -\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} > \operatorname{Arg}(w) > -\frac{6\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{4\pi}{4} > \operatorname{Arg}(w) > -\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} < \operatorname{Arg}(w) < -\pi$$

   Ou seja, a imagem geométrica de w é um ponto do segundo quadrante, e assim temos que:
   - $\operatorname{Re}(w) < 0$
   - $\operatorname{Im}(w) > 0$
   - $|w| = 1$

   Ou seja, o número complexo w pertence ao conjunto A

2.

2.1. No contexto do problema $P\left(B|\overline{A}\right)$ é a probabilidade de retirar uma bola branca da caixa C_2 após terem sido lá colocadas duas bolas retiradas da caixa C_1 que não têm a mesma cor.
Como é sabido que ocorre o acontecimento $\overline{A}$, ou seja, que as bolas retiradas da caixa C_1 não têm a mesma cor, então duas as bolas retiradas da caixa C_1 são uma preta e uma branca.

Como a caixa C_2 tem sete bolas antes da realização da experiência, e serão colocadas nesta caixa 2 bolas, a caixa C_2 ficará com 9 bolas, ou seja o número de casos possíveis é 9, pelo que o número de casos favoráveis é 6, porque o valor da probabilidade é $\frac{2}{3}$:

$$P\left(B|\overline{A}\right) = \frac{2}{3} = \frac{2\times 3}{3\times 3} = \frac{6}{9}$$

Assim, o número de casos favoráveis é 6, ou seja, existem 6 bolas brancas na caixa C_2, num total de 9, ou seja, existem 3 bolas pretas na caixa C_2.

Como foram lá colocadas 1 bola preta e 1 bola branca, inicialmente,na caixa C_2 existiam:

- $6-1=5$ bolas brancas
- $3-1=2$ bolas pretas

2.2. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial $\left(P(X=k) = {}^nC_k\, p^k\, q^{n-k}\right)$.

Temos que:

- $n=6$ (repete-se esta experiência seis vezes).
- $p=\frac{5}{12}$ (a probabilidade do sucesso, ou seja «*Sair bola branca*» é $\frac{5}{12}$, porque existem 12 bolas na caixa das quais 5 são brancas)
- $q=\frac{7}{12}$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1-\frac{5}{12} = \frac{7}{12}$

Assim, calculando a probabilidade de sair bola branca, pelo menos, duas vezes, e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$P(X\geq 2) = 1-P(X<2) = 1-\big(P(X=0)+P(X=1)\big) =$$

$$= 1-\left({}^6C_0\left(\frac{5}{12}\right)^0\left(\frac{7}{12}\right)^6 + {}^6C_1\left(\frac{5}{12}\right)^1\left(\frac{7}{12}\right)^5\right) = 1-\left(\left(\frac{7}{12}\right)^6 + 6\times\frac{5}{12}\left(\frac{7}{12}\right)^5\right) \approx 0{,}79$$

3.

3.1. Como duas horas após o início do processo $(t=2)$, a massa de poluente é metade da existente ao fim de uma hora $(t=1)$, então temos que $p(2) = \frac{p(1)}{2}$

Assim, resolvendo a equação anterior e escrevendo o valor de k forma solicitada, vem:

$$p(2) = \frac{p(1)}{2} \Leftrightarrow 120\,e^{-k\times 2} = \frac{120\,e^{-k\times 1}}{2} \Leftrightarrow \frac{2\times 120}{120} = \frac{e^{-k}}{e^{-2k}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 = e^{-k-(-2k)} \Leftrightarrow 2 = e^{-k+2k} \Leftrightarrow 2 = e^{k} \Leftrightarrow k = \ln 2$$

3.2. Calculando as imagens dos objetos 0 e 3, temos:

$$p(0) = 120\, e^{-0,7\times 0} = 120\, e^{0} = 120 \times 1 = 120$$

$$p(3) = 120\, e^{-0,7\times 3} = 120\, e^{-2,1} \approx 14{,}69$$

E assim, calculando a taxa média de variação da função p no intervalo $[0,3]$ e apresentando o resultado arredondado às unidades, temos

$$TVM_{[0,3]} = \frac{p(3)-p(0)}{3-0} \approx \frac{14{,}69-120}{3} \approx \frac{-105{,}31}{3} \approx -35$$

No contexto da situação descrita, o valor da taxa média de variação significa que nas primeiras 3 horas do processo, a massa de poluente no tanque, decresceu, em média, 35 gramas por hora, aproximadamente.

4.

4.1. Para averiguar se a função f é contínua à esquerda no ponto de abcissa 1, temos que verificar se $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ e para averiguar se a função é contínua à direita no mesmo ponto , temos que verificar se $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

- $f(1) = 2$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2x-2}{\operatorname{sen}(x-1)} = \frac{2(1^-)-2}{\operatorname{sen}(1^- - 1)} = \frac{2-2}{\operatorname{sen} 0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-2}{\operatorname{sen}(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2(x-1)}{\operatorname{sen}(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2}{\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}} = \frac{\lim\limits_{x\to 1^-} 2}{\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}} =$$

(fazendo $y = x-1$, se $x \to 1^-$, então $y \to 0^-$)

$$= \frac{2}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{2}{1} = 2$$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(e^{-2x+4} + \ln(x-1)\right) = e^{-2(1^+)+4} + \ln((1^+)-1) = e^2 + \ln(0^+) = e^2 + (-\infty) = -\infty$

A afirmação é verdadeira porque como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$, a função é contínua à esquerda do ponto de abcissa 1, e como $f(1) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ a função não é contínua à direita do mesmo ponto.

4.2. Para calcular o declive da reta tangente, começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x < 1$:

$$f'(x) = \left(\frac{2x-2}{\operatorname{sen}(x-1)}\right)' = \frac{(2x-2)'\operatorname{sen}(x-1) - (2x-2)(\operatorname{sen}(x-1))'}{(\operatorname{sen}(x-1))^2} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}(x-1) - (2x-2)(x-1)'\cos(x-1)}{\operatorname{sen}^2(x-1)} = \frac{2\operatorname{sen}(x-1) - (2x-2)\cos(x-1)}{\operatorname{sen}^2(x-1)}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa $1 - \frac{\pi}{2}$ é:

$$m = f'\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\operatorname{sen}\left(1 - \frac{\pi}{2} - 1\right) - \left(2\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) - 2\right)\cos\left(1 - \frac{\pi}{2} - 1\right)}{\operatorname{sen}^2\left(1 - \frac{\pi}{2} - 1\right)} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \left(2 - \frac{2\pi}{2} - 2\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2(-1) - \left(-\frac{2\pi}{2}\right)\times 0}{(-1)^2} = \frac{-2-0}{1} = -2$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = -2x + b$

Como $f\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) - 2}{\operatorname{sen}\left(1 - \frac{\pi}{2} - 1\right)} = \frac{2 - \pi - 2}{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-\pi}{-1} = \pi$, sabemos que o ponto $P\left(1 - \frac{\pi}{2}, \pi\right)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.

Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b:

$$\pi = -2\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) + b \Leftrightarrow \pi = -2 + \pi + b \Leftrightarrow \pi - \pi + 2 = b \Leftrightarrow 2 = b$$

Assim, a equação da reta tangente é:

$$y = -2x + 2$$

4.3. Como a abcissa do ponto de inflexão é o zero da segunda derivada da função, começamos por determinar a expressão da segunda derivada, para $x > 1$:

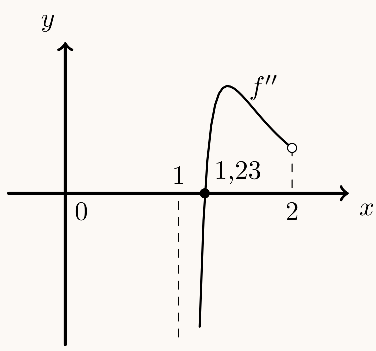
$$f'(x) = \left(e^{-2x+4} + \ln(x-1)\right)' = \left(e^{-2x+4}\right)' + (\ln(x-1))' =$$

$$= (-2x+4)'e^{-2x+4} + \frac{(x-1)'}{x-1} = -2e^{-2x+4} + \frac{1}{x-1}$$

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(-2e^{-2x+4} + \frac{1}{x-1}\right)' = \left(-2e^{-2x+4}\right)' + \left(\frac{1}{x-1}\right)' =$$

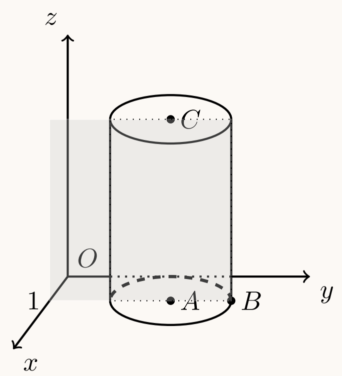
$$= -2\left(e^{-2x+4}\right)' + \frac{(1)'(x-1) - 1\times(x-1)'}{(x-1)^2} = -2\times(-2x+4)'e^{-2x+4} + \frac{0\times(x-1) - 1\times 1}{(x-1)^2} =$$

$$= -2\times(-2)e^{-2x+4} + \frac{-1}{(x-1)^2} = 4e^{-2x+4} - \frac{1}{(x-1)^2}$$



Representando na calculadora gráfica o gráfico da função f'', para valores de $x \in]1,2[$, (reproduzido na figura ao lado) e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados dos zeros de uma função determinamos o valor (aproximado às centésimas) do zero da função f'' (x_0), ou seja, a abcissa do ponto de inflexão do gráfico da função f: $x_0 \approx 1{,}23$

5.



5.1. Como os pontos A, B e C têm abcissa 1, todos pertencem ao plano de equação $x = 1$. Assim a secção produzida no cilindro pelo plano de equação $x = 1$, é o retângulo que contem estes pontos, ou seja o retângulo cujos lados são o diâmetro da base (2) e a altura (3) do cilindro, pelo que a sua área é:

$$A = 2 \times 3 = 6$$

5.2. Como a base inferior do cilindro está contida no plano xOy então os centros das duas bases têm abcissas e ordenadas iguais. Como a cota do centro A é zero e a altura é 3, então as coordenadas do ponto C são (1,2,3)
Assim, calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BC}$, temos:

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (1,2,3) - (1,3,0) = (0, -1,3)$$

E assim, uma condição cartesiana que defina a reta com a direção do vetor $\overrightarrow{BC}$ e que contenha o ponto B, ou seja, a reta BC, é:

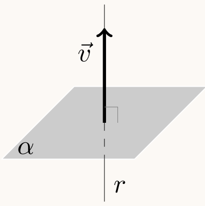
$$x = 1 \ \wedge \ \frac{y-3}{-1} = \frac{z-0}{3} \ \Leftrightarrow \ x = 1 \ \wedge \ -y+3 = \frac{z}{3}$$

O ponto de intersecção da reta BC com o plano xOz é o ponto da reta BC que tem ordenada nula, como todos os restantes pontos do plano xOz.
Assim, substituindo $y = 0$ na condição que define a reta, podemos calcular o valor da cota do ponto de interseção:

$$x = 1 \ \vee \ -0+3 = \frac{z}{3} \ \Leftrightarrow \ x = 1 \ \wedge \ 3 \times 3 = z \ \Leftrightarrow \ x = 1 \ \wedge \ 9 = z$$

Ou seja as coordenadas do ponto de interseção da reta BC com o plano xOz são (1,0,9)

5.3. Pela da condição que define a reta r, podemos identificar o respetivo vetor diretor:



$$x = y = 1 - z \Leftrightarrow \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

Assim, o vetor diretor da reta é o vetor $\vec{v} = (1,1,-1)$, e observando que se o plano é perpendicular à reta r então um vetor normal do plano é o vetor diretor da reta, e assim a equação do plano α é da forma: $x + y - z = d$

E recorrendo às coordenadas do ponto A que pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$1 + 2 - 0 = d \Leftrightarrow 3 = d$$

E assim, uma equação do plano α é $x + y - z = 3$

Como o ponto P pertence ao plano α e tem abcissa e ordenada iguais a 2, podemos calcular a cota:

$$2 + 2 - z_P = 3 \Leftrightarrow 4 - 3 = z_P \Leftrightarrow 1 = z_P$$

E assim, como as coordenadas do ponto P são $(2,2,1)$, podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (2,2,1) - (0,0,0) = (2,2,1)$$

$$\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

Como as coordenadas do ponto C são $(1,2,3)$, podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OC}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{OC} = C - O = (1,2,3) - (0,0,0) = (1,2,3)$$

$$\left\|\overrightarrow{OC}\right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\overrightarrow{OP}\hat{\ }\overrightarrow{OC}\right) = \frac{\overrightarrow{OP} \,.\, \overrightarrow{OC}}{\left\|\overrightarrow{OP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OC}\right\|} = \frac{(2,2,1).(1,2,3)}{3 \times \sqrt{14}} = \frac{2+4+3}{3\sqrt{14}} = \frac{9}{3\sqrt{14}} = \frac{3 \times 3}{3\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

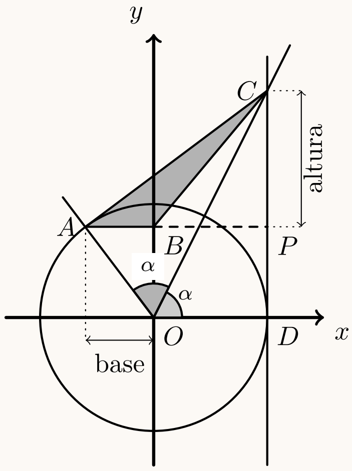
Logo, a amplitude do ângulo OPC, em graus, arredondado às unidades, é:

$$P\hat{O}C = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \approx 37^\circ$$

6. Como se trata de um círculo trigonométrico, o ponto A tem coordenadas $\big(\cos(2\alpha), \text{sen}\,(2\alpha)\big)$, porque o segmento $[OA]$, define com o semieixo positivo Ox um ângulo de $\alpha + \alpha = 2\alpha$

   Considerando o ponto P como o ponto da reta CD com ordenada igual à do ponto A, temos que:

   - a base do triângulo é: $\overline{AB} = -\cos(2\alpha)$
   - a altura do triângulo é: $\overline{PC} = \overline{CD} - \overline{PD} = \text{tg}\,\alpha - \text{sen}\,(2\alpha)$

   Assim, calculando a área do triângulo vem:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{PC}}{2} = \frac{-\cos(2\alpha) \times \big(\text{tg}\,\alpha - \text{sen}\,(2\alpha)\big)}{2} =$$

$$= \frac{-\cos(2\alpha) \times \left(\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} - 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\right)}{2} =$$

$$= \frac{-\cos(2\alpha) \times \left(\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{2\,\text{sen}\,\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha}\right)}{2} =$$

$$= \frac{-\cos(2\alpha) \times \left(\dfrac{\text{sen}\,\alpha\,(1 - 2\cos^2\alpha)}{\cos\alpha}\right)}{2} = \frac{-\cos(2\alpha) \times \text{tg}\,\alpha\,(1 - 2\cos^2\alpha)}{2} =$$

$$= \frac{\cos(2\alpha) \times \text{tg}\,\alpha\big(-(1 - 2\cos^2\alpha)\big)}{2} = \frac{\cos(2\alpha) \times \text{tg}\,\alpha\,(2\cos^2\alpha - 1)}{2} =$$

$$= \frac{\cos(2\alpha) \times \text{tg}\,\alpha\,\big(2\cos^2\alpha - (\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)\big)}{2} = \frac{\cos(2\alpha) \times \text{tg}\,\alpha\,(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)}{2} =$$

$$= \frac{\cos(2\alpha) \times \text{tg}\,\alpha\big(\cos(2\alpha)\big)}{2} = \frac{\text{tg}\,\alpha\cos^2(2\alpha)}{2}$$